

## Trabajo Fin de Máster

Mantenimiento de sistemas con fallos que siguen un  
proceso de Poisson no homogéneo mezclado

*Maintenance of systems under failures following a  
mixed non-homogeneous Poisson process*

Autor

Pablo Martín Villanueva

Directores

Maria Dolores Berrade Ursúa

Germán Badía Blasco

ESCUELA DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA  
2019

## **MANTENIMIENTO DE SISTEMAS CON FALLOS QUE SIGUEN UN PROCESO DE POISSON NO HOMOGÉNEO MEZCLADO**

*Pablo Martín Villanueva*

### **RESUMEN**

Tras la revisión de la bibliografía básica sobre procesos de fallo y mantenimiento, propondremos una nueva política de mantenimiento para sistemas asumiendo que los fallos siguen procesos de Poisson no homogéneos mezclados. El esquema de mantenimiento que se propone trata de reproducir las características de contratos en los que se acuerdan la frecuencia y el coste de los procedimientos que se llevarán a cabo. En este contexto, estudiaremos un mantenimiento que deja al sistema peor de lo que estaba antes del fallo. Así analizaremos las consecuencias del mantenimiento defectuoso que ocurre cuando se utilizan componentes de baja calidad o de segunda mano. Analizaremos las políticas óptimas y su aplicación en la práctica.

# CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN, ALCANCE Y OBJETIVOS.....	4
1.1 Introducción .....	4
1.2 Alcance y objetivos.....	6
2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO .....	7
2.1 Proceso de Poisson no homogéneo mezclado.....	8
2.2 Álgebra del problema.....	9
3. CONVERGENCIA DEL MODELO .....	12
3.1 Convergencia sobre el número de periodos $i$ .....	12
3.2 Convergencia sobre el número de fallos $K$ .....	14
4. CASO BASE.....	19
5. CASOS DE ESTUDIO .....	21
5.1: Caso 1, modificación del parámetro $\alpha$ .....	21
5.2: Caso 2, modificación del parámetro $cm$ respecto a $cr$ .....	24
5.3: Caso 3, modificación del parámetro $c$ .....	26
6. CONCLUSIONES .....	28
7. BIBLIOGRAFÍA.....	30

# 1. INTRODUCCIÓN, ALCANCE Y OBJETIVOS

## 1.1 INTRODUCCIÓN

Los sistemas e infraestructuras industriales fallan de manera aleatoria. Debido a estos fallos, se suelen establecer unas políticas de mantenimiento con el fin de garantizar la *fiabilidad* de los equipos, definida esta como la probabilidad de que en cada instante un equipo siga funcionando de la manera en la que fue diseñado bajo unas condiciones de operación predeterminadas.

Dado que la inversión en nueva tecnología es costosa, prolongar la vida útil de la que se tiene en uso cobra especial relevancia. Por otra parte, el mantenimiento también conlleva costes que pueden ser elevados, lo cual hace necesario definir políticas de mantenimiento que sean óptimas desde el punto de vista del coste. Así se determinarán el número y frecuencia de procedimientos preventivos y correctivos que se realizarán antes de la sustitución del sistema por uno nuevo. Para ello se sopesa el coste incurrido con el que supone no hacer ningún mantenimiento. La renovación del sistema quedará determinada cuando los costes del mantenimiento no compensen la ganancia de prolongar el funcionamiento de aquél.

Así, el primer objetivo de este Trabajo de Fin de Máster (TFM) será el de modelar matemáticamente una política de mantenimiento sobre un sistema o equipo que sufre fallos de acuerdo a un determinado proceso estocástico. El modelo de fallos y la política de mantenimiento, darán lugar a una función de coste cuyo mínimo proporcionará el número óptimo de mantenimientos y su frecuencia antes del reemplazamiento del sistema. Un segundo objetivo del presente TFM es el análisis de la sensibilidad de las políticas óptimas. Con ello se estudiará la dependencia de éstas tanto de los parámetros que definen la fiabilidad del sistema como de los costes implicados.

Existen una gran variedad de políticas de mantenimiento, cada una con su estructura de costes asociadas. De forma general, las políticas de mantenimiento se clasifican en 2 grandes tipos:

1. *Mantenimiento correctivo*: Donde se corrigen fallos ya observados sobre el equipo. Pueden ser *inmediatas* o *diferidas*. En las *inmediatas* se actúa sobre el fallo nada más detectarlo y en las *diferidas* se aguarda un periodo de tiempo determinado hasta actuar sobre el mismo.
2. *Mantenimiento preventivo*: Su objetivo es garantizar la fiabilidad del sistema mediante la realización de las acciones necesarias antes de que se den los fallos. Si el mantenimiento es *programado* las acciones se llevan a cabo periódicamente en periodos de tiempo o de uso predeterminados y fijos. En el mantenimiento *predictivo* se predice el momento en el que el equipo fallará. Para ello se monitoriza alguna variable que sirva de diagnóstico del estado del sistema. Esto es lo que se hace por ejemplo mediante el análisis de vibraciones de cierta maquinaria o el uso de sensores de temperatura o presión para identificar problemas en equipos. Cuando el mantenimiento requiere parar el sistema e interrumpir una producción, los costes pueden aumentar de modo notable. En estos casos se suele recurrir al mantenimiento por *oportunidad*. Este consiste en aprovechar la ocurrencia de un evento para llevarlo a cabo. Las oportunidades pueden ser paradas inducidas por fallos que ocurren en unas partes del sistema durante las cuales se hace el mantenimiento de otras.

La política de mantenimiento propuesta en este TFM será del tipo correctivo, donde los fallos del equipo se detectan y solventan según aparecen. Además de la clasificación de las políticas de mantenimiento, también existe otra clasificación para las reparaciones llevadas a cabo por las políticas de mantenimiento:

1. *Reparación perfecta*: La reparación devuelve al sistema exactamente a las condiciones iniciales del mismo (*as-good-as-new*).
2. *Reparación mínima*: La reparación lleva al sistema a un estado similar al existente justo antes del fallo.

Este tipo de reparaciones mínimas corresponden a realizar la intervención justa para que el sistema vuelva a funcionar.

Para modelar la distribución aleatoria de fallos, se recurre a modelos previamente definidos, que describan su ocurrencia a lo largo de la vida útil del equipo. El supuesto de reparación mínima conduce a que los fallos se comporten como un proceso de Poisson no homogéneo (NHPP). Al tratarse de un proceso de incrementos independientes tiene como consecuencia que los fallos que ocurren en intervalos de tiempo que no se solapan son también independientes. Si bien es una hipótesis frecuente, puede resultar muy restrictiva y no permite describir una reparación que cada vez es menos eficaz.

En este trabajo, se utilizará un proceso de Poisson no homogéneo mezclado como modelo probabilístico de la distribución de los fallos. Este proceso, que será definido detalladamente en apartados posteriores, se basa en el proceso de Poisson ofreciendo 2 modificaciones fundamentales. La primera de ellas es que es no homogéneo, es decir, la tasa de incidencia de fallos  $\lambda(t)$  es función del tiempo y no permanece constante a lo largo del mismo. Así se logra reproducir el hecho de que un sistema sufre más fallos conforme envejece. Por otra parte, el hecho de que sea mezclado elimina la limitación de que los fallos son independientes en intervalos disjuntos lo cual, como se ha mencionado, puede no ser muy realista.

En este proceso de Poisson no homogéneo mezclado, la función  $\lambda(t)$  está mezclada a través de una variable  $\mathcal{W}$ . El significado de esta mezcla es que el valor de  $\lambda(t)$  se aleatoriza respecto a la función de densidad de  $\mathcal{W}$ ,  $\pi(w)$ , de manera que no ofrezca siempre el mismo valor dado un tiempo,  $t$ , determinado. Para un valor  $w$ ,  $\lambda(t|w)$  representa la tasa de fallos del sistema en un instante  $t$  y cuando el efecto de la reparación está dado por  $w$ .

Con este proceso de Poisson no homogéneo mezclado, las acciones de mantenimiento se modelan de manera que dejen al sistema reparado en una situación peor a la que tenía antes de fallar. Así, la presencia de fallos en el pasado aumenta la probabilidad del sistema de sufrir fallos en el futuro como consecuencia de la mala reparación. Esto se une al natural incremento de la probabilidad de ocurrencia de fallos producido por el envejecimiento del sistema, modelado a través de la tasa de fallos dependiente del tiempo. Con frecuencia ocurre que los usuarios de cualquier tecnología indican que ésta “funciona peor” después de haber sido sometida a algún tipo de reparación.

En nuestro trabajo, la variable  $\mathcal{W}$  será una variable aleatoria gamma con función de densidad:

$$\pi(w) = \frac{a^b \cdot w^{b-1} \cdot e^{-a \cdot w}}{\Gamma(b)}$$

Con  $\Gamma(b)$  la función gamma de Euler:

$$\Gamma(b) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{b-1} \cdot dt$$

El proceso de fallos definido de este modo se conoce en la literatura como un proceso de Pólya generalizado. La ventaja de su uso es que permite modelar un mantenimiento de baja calidad que deja el sistema peor de lo que estaba antes del fallo. Esta situación ocurre como resultado del trabajo realizado por personal poco experimentado o por el uso de repuestos no originales o de segunda mano o material deficiente.

También se han modelado los costes asociados a cada fallo producido en el sistema. Se incurre en estos costes bien por el trabajo realizado por el equipo propio del que se dispone en el lugar donde está instalado el sistema o por el trabajo realizado por un equipo externo. En este último caso los costes se derivan de un contrato de mantenimiento cuyo objeto es realizar las reparaciones sobre el sistema. En este trabajo, se supondrá que las acciones de mantenimiento están contratadas a una empresa especializada y se penalizará al contratista si los fallos ocurren muy pronto o si ocurre un gran número de ellos en un corto periodo de tiempo. Así, el coste de la reparación del fallo número  $j$ , estará dada por:

$$c(x, j) = c \cdot \frac{x}{j}$$

Siendo  $x$  el tiempo transcurrido hasta que ocurre el fallo  $j$ . El coste es inversamente proporcional a la frecuencia de fallos. Describiendo el procedimiento habitual en la práctica, el mantenimiento del sistema se completa con su reemplazamiento por un sistema nuevo. Éste ocurre en instantes programados  $iT$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) sólo si el número de fallos acumulado hasta ese momento es mayor o igual que  $N$ . Si al llegar  $iT$  el número de fallos previo es inferior a  $N$ , en  $iT$  no se realiza ningún mantenimiento.

La idea de realizar el mantenimiento preventivo en instantes planificados de antemano [1,2] simplifica el procedimiento y abarata los costes ya que permite realizar acuerdos contractuales con los equipos de mantenimiento. Al mismo tiempo da lugar a poder beneficiarse de la adquisición de sistemas tecnológicamente mejorados respecto al que está en uso.

Respecto al modelo original de mantenimiento descrito en [1] en el que se asumía el reemplazamiento en instantes  $iT$  sólo si el número de fallos es igual o superior a  $N$ , el modelo que se presenta en esta memoria añade la posibilidad de reemplazamiento del sistema por oportunidad. Por oportunidad se entiende un evento ocurrido de modo aleatorio en el que el reemplazamiento del sistema resulta particularmente económico. Este sería el caso cuando ya han tenido lugar  $N$  fallos y ocurre una oferta con anterioridad a que llegue el instante  $iT$  y que mejora el coste de sustitución acordado para ese momento. Esta oferta puede provenir bien de la propia empresa con quien se tenía pactado el mantenimiento pero que busca fidelizar al cliente, o de una nueva que trata de instalarse en el mercado mediante una agresiva política de costes.

Por último, la función de coste del sistema será la utilizada habitualmente en la literatura, definida como la razón entre el coste medio del sistema frente a su duración media, entendida la duración como el tiempo transcurrido hasta el reemplazo del sistema.

## 1.2 ALCANCE Y OBJETIVOS

El primer objetivo del presente trabajo consiste en implementar el proceso de fallos y la función de coste en *MatLab*, con el objetivo de obtener la política de mantenimiento óptima que minimiza la función de coste. Por política óptima entendemos los valores concretos de  $T$  y  $N$ , es decir, el periodo de tiempo entre instantes programados para el mantenimiento y el número de fallos del sistema a partir del cual el mantenedor prevé su sustitución por otro nuevo. El segundo objetivo del trabajo es estudiar los cambios en la política óptima cuando se modifican los valores de los parámetros del modelo. Los parámetros del modelo son los que describen el proceso de fallos, la ocurrencia de oportunidades y los costes de reparaciones y sustitución.

El trabajo constará de las siguientes secciones:

1. Una primera parte, donde se *describirá el modelo*, definiendo los fallos y la política de mantenimiento. Esta parte contendrá las bases teóricas, así como las ecuaciones y funciones utilizadas en el trabajo.
2. En la segunda sección se discutirá acerca de la *convergencia del modelo* dado que debido al uso de *MatLab* como programa de cálculo, se hace necesario truncar algunos de los sumatorios infinitos existentes en el problema a partir de un término donde ya no se observe pérdida de precisión en los resultados.
3. En el tercer capítulo se presentará el *caso base* de nuestro problema junto con la política y coste óptimo asociados. A partir de este caso base se realizará el estudio de sensibilidad.
4. En la cuarta parte, se realizarán una serie de *casos de cálculo*, cada uno teniendo en cuenta unas modificaciones concretas de los parámetros del problema para observar los desplazamientos producidos en la situación de los valores óptimos del problema.

Se terminará con una serie de *conclusiones*, recopilación de todas las ideas importantes surgidas durante la realización del mismo. El objetivo de este apartado es plantear una guía útil para realizar el mantenimiento.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

En esta sección se detallará la política de mantenimiento seguida en nuestro trabajo, además de su formulación algebraica, incluyendo las funciones que describen probabilísticamente la aparición de fallos y las que calculan los costes asociados al sistema.

La política de mantenimiento seguida en este trabajo está basada en la introducida por Nakagawa en [1]. Este autor considera un sistema con un solo componente que puede estar en uno de los siguientes dos estados, bueno o en fallo. Los fallos se detectan según ocurren y se dan según un proceso de Poisson no homogéneo. El mantenimiento preventivo está programado en tiempos  $iT$ , con  $i = 1, 2, \dots$ . Si el número de fallos es igual o superior a un número prefijado,  $N$ , entonces el mantenimiento preventivo consistente en el reemplazamiento del sistema se lleva a cabo en el siguiente momento planificado. En caso contrario no se lleva a cabo ningún mantenimiento.

En el modelo propuesto por Nakagawa, el mantenimiento consiste en una reparación mínima que devuelve al sistema al estado que estaba justo antes del fallo. Por tanto, los fallos tienen lugar de acuerdo a un proceso de Poisson no homogéneo [3].

En este trabajo se considerará una doble extensión sobre el modelo. En primer lugar, asumiendo que los fallos se dan según un proceso de Poisson no homogéneo *mezclado*. Utilizando una variable mezcladora  $\mathcal{W}$  replicaremos el efecto en el cual las reparaciones del sistema lo dejan en una situación peor que la que tenía el sistema antes de fallar. Como hemos comentado anteriormente, esto se puede deber al uso de repuestos de segunda mano o de mala calidad, así como a la falta de experiencia de quien realiza la reparación. El mantenimiento también está planificado para momentos  $iT$ , con  $i = 1, 2, \dots$ , como en el modelo inicial. Si el número previo de fallos es igual o superior a  $N$ , entonces el sistema será reemplazado en el siguiente momento planificado de mantenimiento o bien (y esta es la segunda extensión del modelo) cuando aparezca una oportunidad, si esta tiene lugar antes del siguiente momento de mantenimiento planificado. El sistema se deja como estaba en los momentos planificados de mantenimiento,  $iT$ , si el número de fallos en  $iT$  es menor que  $N$ . El mantenimiento basado en oportunidades significa que el mantenimiento se pospone hasta que la oportunidad ocurre. En sistemas complejos, con varios componentes, los fallos en un componente pueden representar oportunidades para reparar el resto.

Por tanto, en lugar de sustituir al sistema justo cuando el  $N$ -ésimo fallo sucede, el reemplazamiento se retrasa hasta el siguiente momento planificado de mantenimiento u oportunidad, en lo que se dé antes. Así, de una parte, se prolonga la vida útil del sistema y, por otra se cuenta con el tiempo necesario para disponer del equipo humano y material que se precisen. Posponer el mantenimiento permite asimismo reemplazar un sistema por otro tecnológicamente mejorado y que no esté todavía disponible en el momento presente. Tanto en el mantenimiento programado como por oportunidad, la sustitución es perfecta. Se suele asumir que el reemplazamiento por oportunidad resulta más barato.

Hay que aclarar que cada vez que se dé un fallo  $j$ , se realizará una reparación *on-line* sobre el sistema, diferente del reemplazamiento, con sus costes asociados. En general, estos son los costes considerados en el trabajo serán:

1.  $c(j, t)$ : Coste de la reparación del fallo  $j$  en el momento  $t$ .
2.  $c_r$ : Coste de reemplazamiento del sistema en un momento planificado de mantenimiento.
3.  $c_m$ : Coste de reemplazamiento en una oportunidad.

Evidentemente, después del fallo  $N$ , se pueden dar  $K$  fallos adicionales antes de la sustitución del equipo en el momento  $iT$  o en oportunidad. En el siguiente gráfico se puede observar un esquema de la política de mantenimiento. En los esquemas dados en las Figuras 1 y 2,  $X$  representa el tiempo aleatorio hasta que ocurre el fallo  $N$  que dispara el mantenimiento. En la

Figura 1 y 2,  $Y$  representa el tiempo aleatorio hasta el reemplazamiento, bien en momento planificado o en oportunidad:

1. Si el reemplazo se da en un momento planificado de revisión, con  $K$  fallos entre el fallo  $N$  y el momento planificado de mantenimiento:

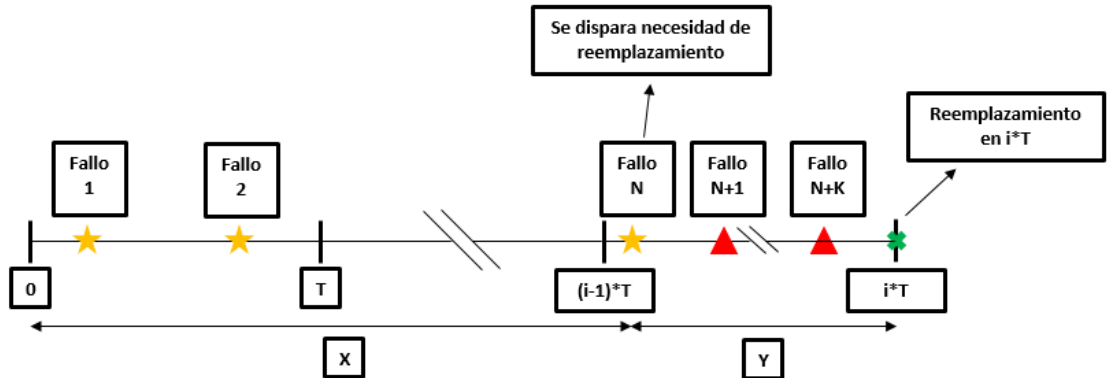


Fig. 1: Esquema de reemplazamiento en momento planificado de revisión.

2. Si el reemplazo se da en una oportunidad, con  $K$  fallos entre el fallo  $N$  y la oportunidad:

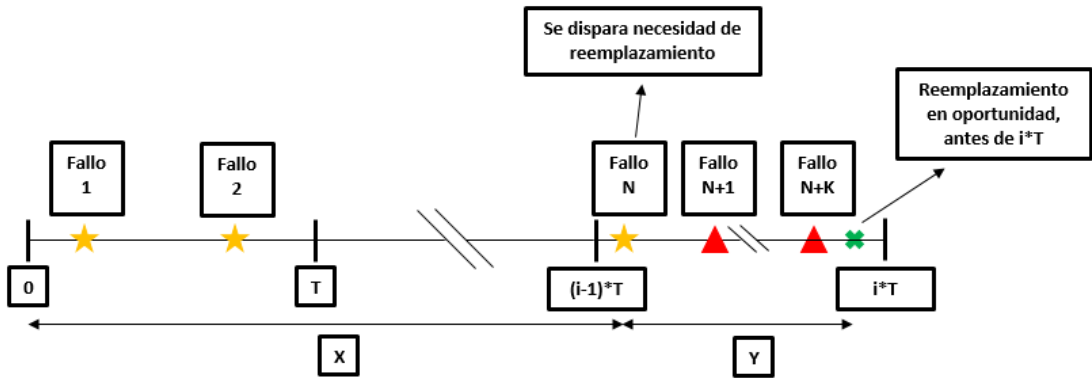


Fig. 2: Esquema de reemplazamiento en oportunidad.

Evidentemente, se puede dar el caso de que se den 0 fallos entre el fallo  $N$  y el reemplazamiento para ambos casos. Es importante señalar que los modelos que consideran la posibilidad de mantenimiento por oportunidades [1,2], suelen asumir que este presenta un coste inferior al de reemplazo programado, es decir,  $c_m < c_r$ . Por este motivo se suele aprovechar la ocurrencia de aquéllas para llevarlo a cabo.

## 2.1 PROCESO DE POISSON NO HOMOGÉNEO MEZCLADO

Consideremos los fallos de un sistema que empieza a funcionar de nuevo en  $t = 0$  con  $N(t)$  la variable aleatoria que cuenta el número de fallos acumulado hasta el instante  $t$ . Cuando la tasa de ocurrencia de fallos,  $\lambda(t)$ , es constante entonces el proceso de conteo  $\{N(t) : t \geq 0\}$  sigue un proceso de Poisson homogéneo. Este supuesto de tasa constante puede ser útil para describir fallos producidos por accidentes (picos en la corriente de alimentación, escapes...) que ocurren a tasa constante en el tiempo. Sin embargo, no es un modelo adecuado cuando los fallos ocurren por uso y desgaste del sistema. Hay que precisar que  $\lambda(t)$  representa, en cada instante  $t$ , la probabilidad de fallo instantáneo. Así, en estos casos es más razonable considerar una tasa dependiente del tiempo, es decir, un proceso de Poisson no homogéneo.

Se define, en primer lugar, la intensidad acumulada:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$$



En un proceso de Poisson no homogéneo mezclado la función de intensidad depende, además del tiempo, de una variable aleatoria  $\mathcal{W}$  cuyo valor representa unas condiciones particulares, por ejemplo, el estado en el que queda el sistema tras una reparación. Así se tiene:

1.  $\mathcal{W} = 1$ : el sistema queda como justo estaba antes de la reparación.
2.  $\mathcal{W} > 1$ : el sistema queda peor que en el estado previo a la reparación.
3.  $\mathcal{W} < 1$ : el sistema queda mejor que como estaba antes de ser reparado.

Es decir, al considerar un proceso de Poisson no homogéneo mezclado, además de describir el deterioro natural del sistema con una intensidad creciente, la intensidad refleja el efecto añadido de la calidad de reparación del mismo.

El tiempo hasta el fallo  $N$ ,  $S_N$ , tiene la siguiente función de densidad:

$$(1) f_N(x) = \int_0^\infty w \lambda(x) \frac{(w \Lambda(x))^{N-1}}{(N-1)!} e^{-w \Lambda(x)} \pi(w) dw$$

Mientras que la función de densidad del tiempo que transcurre hasta el fallo  $K$  (con  $K > N$ ) dado que el fallo  $N$  ha ocurrido en  $x$  está dada por:

$$(2) f_{K/N=x}(z/x) = \int_0^\infty w \lambda(x) \frac{(w(\Lambda(x+z) - \Lambda(x)))^{K-N-1}}{(K-N-1)!} e^{-w(\Lambda(x+z) - \Lambda(x))} w \lambda(x) \frac{(w \Lambda(x))^{N-1}}{(N-1)!} e^{-w \Lambda(x)} \pi(w) dw$$

En un proceso de Poisson mezclado, el sistema después de la reparación del fallo  $i$ -ésimo estará en mejores o peores condiciones que antes de fallar dependiendo de la distribución de la variable mezcladora  $\mathcal{W}$ . En este trabajo,  $\mathcal{W}$  se define como una variable aleatoria gamma con función de densidad:

$$(3) \pi(w) = \frac{a^b \cdot w^{b-1} \cdot e^{-aw}}{\Gamma(b)}, w > 0$$

Siendo  $\Gamma(b)$  la función gamma de Euler:

$$\Gamma(b) = \int_0^\infty e^{-t} t^{b-1} dt$$

El valor medio de la variable aleatoria gamma está dado por  $\mu = \frac{b}{a}$ . Valores de  $\mu$  por encima de 1 implican una reparación deficiente que, aunque devuelve la funcionalidad al sistema, reduce su fiabilidad respecto a la que tenía antes de fallar.

## 2.2 ÁLGEBRA DEL PROBLEMA

Una vez definido el NHPP mezclado, pasamos a describir matemáticamente las ecuaciones necesarias para calcular la función de coste. Como se ha comentado previamente esta se define como la razón entre el valor esperado del coste del mantenimiento y el tiempo medio que transcurre hasta que el sistema es reemplazado. El periodo hasta la renovación, denominado ciclo, lo denotaremos por  $\tau$ . La función de coste refleja, por tanto, el coste medio por unidad de tiempo.

### *Tiempo medio hasta la renovación del sistema*

Una vez que los  $N$  fallos han sucedido, se dispara el proceso para el reemplazamiento del sistema, de modo que este ocurrirá en el siguiente momento planificado de mantenimiento,  $iT$ , o en una oportunidad, lo que ocurra en primer lugar. Todos los fallos que puedan ocurrir hasta ese momento serán reparados siguiendo la misma estructura de costes y reparaciones deficientes. Este esquema reproduce el tipo de acuerdos en contratos de mantenimiento.

Las oportunidades aparecerán de manera aleatoria siguiendo un proceso de Poisson homogéneo con tasa de ocurrencia  $\alpha$ . La probabilidad de que el sistema se renueve en el momento planificado de mantenimiento  $R = iT$  está dada por:

$$p_i = P(R = iT) = \int_{(i-1)T}^{iT} f_N(x) e^{-\alpha(iT-x)} dx$$

Mientras que la probabilidad de que la renovación ocurra en una oportunidad en el intervalo  $\{(i-1)T, iT\}$  es:

$$q_i = \int_{(i-1)T}^{iT} f_N(x) (1 - e^{-\alpha(iT-x)}) dx$$

Por tanto, el tiempo medio hasta el reemplazamiento del sistema,  $E[\tau]$ , es:

$$(4) E[\tau] = T \sum_{i=1}^{\infty} i p_i + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{(i-1)T}^{iT} f_N(x) \left( \int_0^{iT-x} (x+y) \alpha e^{-\alpha y} dy \right) dx$$

#### Coste esperado del sistema

El sistema se reemplaza en un momento planificado de mantenimiento  $iT$  con probabilidad  $p_i$  y coste  $c_r$  o en una oportunidad con probabilidad  $q_i$  y coste  $c_m$ . El número de reparaciones que se producen en un ciclo serán las  $N$  fijadas previamente más las que tengan lugar para reparar los fallos ocurridos después del  $N$  fallo hasta el reemplazamiento. El número de estos será una variable aleatoria,  $K$ . El coste medio total del sistema está formado por tres términos:

1. Coste debido a las reparaciones durante el ciclo,  $ECR$ .
2. Coste debido al reemplazamiento en momento planificado de mantenimiento.
3. Coste debido al reemplazamiento en oportunidad.

Respecto al coste debido a las reparaciones durante el ciclo:

$$(5) ECR = \sum_{j=1}^N \int_0^{\infty} c(j, x) f_j(x) dx + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{(i-1)T}^{iT} f_N(x) e^{-(iT-x)\alpha} \left( \int_x^{iT} c(k, z) f_{K/N}(z/x) dz \right) dx + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{(i-1)T}^{iT} f_N(x) \left( \int_0^{iT-x} \alpha e^{-\alpha y} \left( \int_0^y c(k, z) f_{K/N}(z/x) dz \right) dy \right) dx$$

En la fórmula dada en (5), el primer término corresponde al coste generado por los primeros  $N$  fallos. El segundo corresponde al coste de los  $K$  fallos ocurridos entre el momento en el que sucede el  $N$  fallo y la sustitución en un momento planificado de mantenimiento y el tercero al coste de los  $K$  fallos ocurridos entre el momento en el que sucede el  $N$  fallo y el mantenimiento en oportunidad.

El coste medio debido al reemplazamiento en momento planificado de mantenimiento es:

$$c_r \sum_{i=1}^{\infty} p_i$$

El coste medio debido al reemplazamiento en oportunidad es:

$$c_m \sum_{i=1}^{\infty} q_i$$

Por tanto, el valor esperado del coste del ciclo es:

$$(6) E[C(\tau)] = c_r \sum_{i=1}^{\infty} p_i + c_m \sum_{i=1}^{\infty} q_i + ECR$$

### *Función de coste del sistema*

La función de coste objetivo finalmente se define como:

$$Q(T, N, \alpha, c_r, c_m, c(j, x), a, b) = \frac{E[C(\tau)]}{E[\tau]}$$

### *Parámetros y funciones concretas utilizadas en el problema*

Para el estudio de casos, además de asumir que la variable mezcladora,  $\mathcal{W}$ , sigue una distribución gamma, consideraremos que la tasa de incidencia de los fallos es:

$$\lambda(t) = 0,1(t + 1)e^{\int_0^t 0,1(u+1)du}$$

Los costes de reparación de los fallos que tienen lugar durante la vida útil del sistema se supondrán dependientes del tiempo y del número de ellos que ocurran. Este tipo de cláusulas son habituales en los contratos de mantenimiento. En particular se proponen costes de acuerdo a la siguiente expresión:

$$c(j, x) = c \cdot \frac{x}{j}$$

De esta manera modelamos una estructura de costes donde:

1. El coste de la reparación disminuye cuantos más fallos ocurran en un periodo de tiempo fijo. Esta penalización para la empresa que realiza el mantenimiento pretende incentivar que este se haga bien, evitando fallos posteriores.
2. Se penaliza a la empresa mantenedora por fallos tempranos, ya que los costes disminuyen con valores de  $x$  pequeños. De esta manera se busca que la empresa mantenedora haga un mantenimiento particularmente cuidadoso en las etapas iniciales y medias de la vida útil. Asimismo, se da menos importancia a los fallos que suceden en las etapas finales de vida del sistema, cuando se aproxima su reemplazamiento.

### 3. CONVERGENCIA DEL MODELO

En las ecuaciones presentadas anteriormente, se observa un problema relativo al uso de un programa como *MatLab* para la resolución de las mismas. En concreto, este problema está localizado en las integrales extendidas a lo largo de  $(0, \infty)$  mostradas en los sumatorios que a su vez contienen un número infinito de términos. Estas integrales y sumatorios aparecen en las expresiones del valor esperado de la duración del ciclo y del valor esperado del coste que se encuentran en (4), (5) y (6).

Se advierte que estos sumatorios con infinitos sumandos reflejan:

1. El número de periodos de momentos planificados de mantenimiento,  $i$ , considerados.
2. El número total de fallos,  $K$ , que pueden tener lugar tras el fallo  $N$ , que suceden antes del reemplazamiento periódico o en oportunidad.

La ejecución en Matlab requiere sumatorios con un número finito de términos. Este problema se puede resolver de 2 maneras:

- a) Encontrando expresiones alternativas, que sustituyan a las fórmulas mostradas y que ofrezcan valores muy aproximados a los reales sin necesidad de recurrir a sumatorios infinitos. Se rechaza esta posibilidad debido a la complejidad de las ecuaciones con las que contamos.
- b) Sustituyendo los sumatorios infinitos por sumas finitas de modo que el error de aproximación sea suficientemente pequeño. Para ello realizaremos un estudio de convergencia sobre el número de los posibles mantenimientos programados (índice  $i$  en las ecuaciones (4), (5) y (6)) y número de fallos que ocurren, tras el  $N$ , hasta el reemplazamiento del sistema (índice  $k$  en la ecuación (5)).

#### 3.1 CONVERGENCIA SOBRE EL NÚMERO DE PERIODOS $i$

Para hallar el valor de  $i$  a partir del cual podemos asegurar que el valor de los sumatorios mostrados converge, no se pondrá el foco sobre las ecuaciones mostradas anteriormente sino sobre la expresión de la función de densidad de probabilidad del tiempo hasta los  $N$  fallos,  $S_N$ , dada en (1).

Esta función depende del número de fallos,  $N$ , a partir de los cuales se activa el procedimiento de reemplazo del sistema. Cuanto menor sea el número  $N$  fijado, es de esperar que esos  $N$  fallos se den antes y  $S_N$  sea menor. Por tanto, la probabilidad de que los  $N$  fallos ocurran en  $x$  pequeños será mayor cuanto menor sea  $N$ .

Por el contrario,  $S_N$  toma valores más elevados cuanto mayor sea  $N$  pudiéndose encontrar, para cada  $N$  fijo, un valor de  $x$  a partir del cual la integral de su correspondiente función de densidad ya llegue prácticamente al valor de 1. A partir de ese valor  $x$ , y para un valor de  $T$  dado, podremos obtener el término  $i$  del sumatorio en el cual la función de densidad integra prácticamente 1 y a partir del cual el resto de términos se pueden ignorar. Es decir, se puede asegurar con un error despreciable que a partir de ese  $x$  hallado, los  $N$  fallos ya se han dado y no tiene sentido seguir recorriendo el intervalo temporal.

Antes de mostrar los resultados del estudio de convergencia, es necesario puntualizar que el valor de convergencia de  $i$  depende del  $N$  que fijemos. En este trabajo, contemplaremos como máximo una  $N$  de 10, que es el caso más desfavorable para el estudio que se va a realizar. Para realizar el estudio de convergencia, iremos aumentando progresivamente el límite superior de la integral de la función de probabilidad (de 1 a 20) para observar en qué punto la integral se hace 1. En la Tabla 1 se muestran los resultados para  $N = 10$ :

$x_{max}$	Valor de la integral de $f_N(x)$ sobre $[0, x_{max}]$
1	9,50757712930763E-09
2	4,69571764851463E-05
3	0,00445982402299273
4	0,06187408392570220
5	0,27137854334130800
6	0,58322593477740200
7	0,82607413795193800
8	0,94459647919570700
9	0,98584541525735000
10	0,99699623830765000
11	0,99945989533390700
12	0,99991692145851600
13	0,99998902427646800
14	0,99999875276817000
15	0,99999987803432900
16	0,99999989693485400
17	0,99999986565096700
18	0,99999992969969900
19	0,99999995887689600
20	0,99999994441493500

Tabla 1: Valores de convergencia para  $i$ .

De forma gráfica:

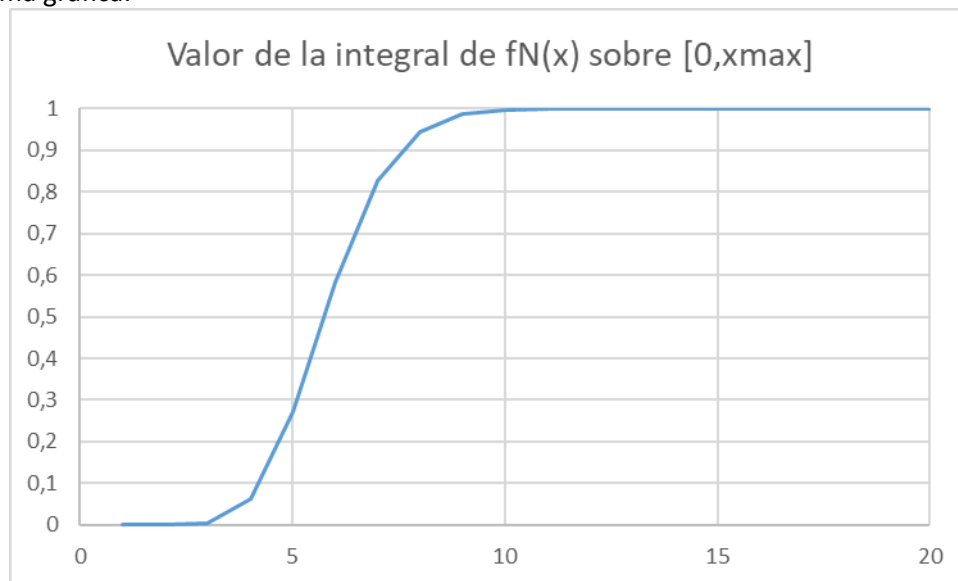


Fig. 3: Valores de convergencia para  $i$ .

A la vista de los resultados se observa que a partir de un valor de  $x_{max}$  cercano a 13, el valor de la integral prácticamente alcanza el valor 1.

Para obtener el valor máximo de periodos tenido en cuenta en el problema, hay que tener en cuenta que las ecuaciones presentan el tiempo dividido en intervalos de amplitud  $T$  que señalan los instantes programados de mantenimiento:

$$x = i \cdot T$$

Es decir:

$$x_{max} = i_{max} \cdot T$$

$$i_{max} = \frac{13}{T}$$

Sin embargo, esta manera de fijar el número máximo de periodos de mantenimiento resulta algo problemática. Esto se debe a que *MatLab* trunca los números decimales, a partir del primer decimal incluido, dejando sólo la parte entera del número. Esto se traduce en que si, por ejemplo,  $T = 7$ :

$$i_{max} = \frac{13}{T} = \frac{13}{7} = 1,857$$

Truncando:

$$i_{max} = 1$$

Lo cual quiere decir que nuestro problema contemplaría un periodo temporal de hasta:

$$i_{max} \cdot T = 7$$

Observando en la Tabla 1, en  $x_{max} = 7$  sólo podemos asegurar al 82,6% que se han dado ya los  $N = 10$  fallos que contemplamos. Existe por tanto una pérdida de precisión. Esto se soluciona modificando la fórmula del  $i_{max}$  de manera que:

$$(7) i_{max} = \frac{13}{T} + 1$$

Sin embargo, hay que señalar que para valores de  $x_{max}$  mayores que 20 algunas de las integrales incluidas en el cálculo del *ECR*, (5), dejan de ofrecer resultados numéricos. Así, por ejemplo, para un hipotético  $T = 11,5$ :

$$i_{max} = \frac{13}{T} + 1 = \frac{13}{11,5} + 1 = 2,13$$

Truncado:

$$i_{max} = 2$$

Cuyo  $x_{max}$  sería:

$$i_{max} \cdot T = 23$$

Que supera el límite de  $x_{max}$  de 20 fijado anteriormente. Por tanto en nuestro problema solo contemplaremos valores de  $T$  hasta 10, manteniendo el cálculo de  $i_{max}$  como en (7).

### 3.2 CONVERGENCIA SOBRE EL NÚMERO DE FALLOS $K$

Una vez obtenida la expresión de  $i_{max}$ , pasaremos a obtener el número de fallos  $K$  máximo,  $K_{max}$ , ocurridos después del fallo  $N$  que dispara el mantenimiento preventivo que consideraremos en nuestro problema.

Hay que tener en cuenta que la convergencia de este parámetro se debe a 2 causas:

1. El número  $K$  de fallos tras el  $N$  en un intervalo dado de amplitud menor o igual que  $T$ , es tanto más improbable cuanto mayor es  $K$ .
2. De forma general, la expresión del coste de reparación de los fallos sobre el sistema decrece conforme crece el número de fallos si su ocurrencia está lo suficientemente separada en el tiempo.

Para obtener  $K_{max}$ , simplemente evaluaremos el valor de la función de coste de la red,  $Q$ , para diferentes valores, candidatos a  $K_{max}$ , para valores  $T = \{0,5, 1, \dots 13\}$ , de 0,5 en 0,5, y  $N = \{1, 2, \dots 10\}$  de 1 en 1. Para esta evaluación utilizaremos los valores del caso base, que describiremos en el apartado posterior. Los valores de  $K_{max}$  considerados serán 5, 6 y 7 y mostraremos los valores del número de periodos óptimos,  $N^*$ , y del valor de la función de coste,  $Q$ , para cada  $T$ . Los resultados son, para  $K_{max} = 5, 6$  y 7 se muestran respectivamente en las Tablas 2, 3 y 4:

T	N*	Q
0,5	10	0,79858385
1	10	0,75571669
1,5	10	0,71930586
2	9	0,68753999
2,5	9	0,66041381
3	6	0,63538849
3,5	6	0,60562453
4	7	0,57903747
4,5	10	0,55916616
5	10	0,55225222
5,5	10	0,5611304
6	2	0,5611821
6,5	2	0,53392265
7	2	0,50777133
7,5	2	0,48372289
8	2	0,46229894
8,5	2	0,443631
9	2	0,42759776
9,5	2	0,41394577
10	2	0,40237372

Tabla 2: Valores de convergencia para  $K_{max} = 5$ .

Para  $K_{max} = 6$ :

T	N*	Q
0,5	10	0,79858388
1	10	0,75571673
1,5	10	0,71930591
2	10	0,68754016
2,5	10	0,66041399
3	7	0,63540342
3,5	6	0,60564077
4	7	0,57904142
4,5	10	0,5591662
5	10	0,55225226
5,5	10	0,56113045
6	10	0,56344702
6,5	2	0,53612804
7	2	0,50991846
7,5	1	0,48581618
8	1	0,46434422
8,5	1	0,44563437
9	1	0,42956517
9,5	2	0,41588264
10	2	0,40428464

Tabla 3: Valores de convergencia para  $K_{max} = 6$ .

Para  $K_{max} = 7$ :

<b>T</b>	<b>N*</b>	<b>Q</b>
<b>0,5</b>	10	0,79858393
<b>1</b>	10	0,75571679
<b>1,5</b>	10	0,71930599
<b>2</b>	10	0,68754043
<b>2,5</b>	10	0,66041425
<b>3</b>	7	0,63542186
<b>3,5</b>	6	0,6056613
<b>4</b>	7	0,57904673
<b>4,5</b>	10	0,55916627
<b>5</b>	10	0,55225233
<b>5,5</b>	10	0,56113052
<b>6</b>	10	0,5657118
<b>6,5</b>	2	Imposible obtenerlo debido a error del programa
<b>7</b>	2	0,51206601
<b>7,5</b>	1	0,48790991
<b>8</b>	1	0,46638993
<b>8,5</b>	1	0,44763822
<b>9</b>	1	0,43153283
<b>9,5</b>	2	Imposible obtenerlo debido a error del programa
<b>10</b>	2	Imposible obtenerlo debido a error del programa

*Tabla 4: Valores de convergencia para  $K_{max} = 7$ .*

Algunos valores de  $Q$  para  $K_{max} = 7$  no pudieron ser hallados debido a errores numéricos del sistema. En términos porcentuales, calculados sobre el valor de  $Q$  en el caso base,  $Q_{CB}$ , la diferencia entre los valores obtenidos en  $Q$  para  $K_{max} = 5$  y  $K_{max} = 6$ ,  $Q_{K6}$ , se muestra en la Tabla 5:



<b>T</b>	<b>%<math>Q_{CB}-Q_{K6}</math></b>
<b>0,5</b>	0,000
<b>1</b>	0,000
<b>1,5</b>	0,000
<b>2</b>	0,000
<b>2,5</b>	0,000
<b>3</b>	0,002
<b>3,5</b>	0,003
<b>4</b>	0,001
<b>4,5</b>	0,000
<b>5</b>	0,000
<b>5,5</b>	0,000
<b>6</b>	0,404
<b>6,5</b>	0,413
<b>7</b>	0,423
<b>7,5</b>	0,433
<b>8</b>	0,442
<b>8,5</b>	0,452
<b>9</b>	0,460
<b>9,5</b>	0,468
<b>10</b>	0,475

*Tabla 5: Diferencias porcentuales para los valores entre  $K_{max} = 5$  y  $K_{max} = 6$ .*

La Tabla 7 contiene la diferencia en términos porcentuales, calculados sobre el valor de  $Q$  en el caso base,  $Q_{CB}$ , entre los valores obtenidos en  $Q$  para  $K_{max} = 5$  y  $K_{max} = 7$ ,  $Q_{K7}$ :

<b>T</b>	<b>%Q<sub>CB</sub>-Q<sub>K7</sub></b>
<b>0,5</b>	0,000
<b>1</b>	0,000
<b>1,5</b>	0,000
<b>2</b>	0,000
<b>2,5</b>	0,000
<b>3</b>	0,005
<b>3,5</b>	0,006
<b>4</b>	0,002
<b>4,5</b>	0,000
<b>5</b>	0,000
<b>5,5</b>	0,000
<b>6</b>	0,807
<b>6,5</b>	NaN
<b>7</b>	0,846
<b>7,5</b>	0,866
<b>8</b>	0,885
<b>8,5</b>	0,903
<b>9</b>	0,920
<b>9,5</b>	NaN
<b>10</b>	NaN

*Tabla 6: Diferencias porcentuales para los valores entre  $K_{max} = 5$  y  $K_{max} = 7$ .*

En la Tabla 6 se observa que en ningún caso el error supera el 1%. Puede parecer una diferencia alta, sobre todo si se compara con la precisión que hemos considerado para obtener la convergencia del parámetro  $i$ , pero es importante precisar que el valor del parámetro  $K_{max}$  tiene una influencia decisiva sobre el tiempo de ejecución del problema, que puede pasar de 8 a 10 o 12 horas por cada vez que se calcule un caso al pasar de  $K_{max} = 5$  a 6 o 7, y que hay que alcanzar un compromiso entre éste y la precisión de los resultados obtenidos. Por este motivo, con  $K_{max} = 5$  se considera ese compromiso como alcanzado, y será el valor que se utilice de aquí en adelante. Hay que resaltar que la limitación  $K_{max} = 5$ , presenta algunos inconvenientes al hacer el estudio de sensibilidad que se mencionarán en su capítulo correspondiente. Estos inconvenientes surgen por el hecho de que el error es creciente con  $T$ . Cuanto mayor sea el intervalo para el mantenimiento, el número de fallos que pueden ocurrir a partir del  $N$  aumenta también y el supuesto  $K_{max} = 5$  resulta menos realista.

## 4. CASO BASE

En este capítulo del trabajo se mostrará el caso base utilizado como punto de partida de todos los casos de estudio que mostraremos en la sección posterior. A partir de él se analizará el efecto en la política óptima cuando se hacen modificaciones en los valores de los parámetros que lo definen. Los valores de los parámetros fijados para el caso base son:

Parámetro	Valor
$\alpha$ , tasa de aparición de oportunidades	0,3
$c_r$ , coste de reemplazamiento en momento planificado	3
$c_m$ , coste de reemplazamiento en oportunidad	1,5
$c$ , asociado a los costes de reparación	0,175
$a$ , parámetro de la función gamma de Euler	1
$b$ , parámetro de la función gamma de Euler	1,5

Tabla 7: Valores de los parámetros para el caso base.

Se observa que el coste de reemplazamiento en un período planificado de mantenimiento es mayor que en una oportunidad, tal y como se había mencionado anteriormente.

Los valores del caso base se han encontrado de manera que los resultados del ejercicio de optimización ofrezcan valores razonables. Los resultados de la optimización en  $N$  para cada valor de  $T$  se muestran en la Tabla 8:

Para T:	N*	Valor de la función de coste, Q, en N óptimo
0,5	10	0,798583849
1	10	0,755716686
1,5	10	0,719305863
2	9	0,687539985
2,5	9	0,660413814
3	6	0,635388486
3,5	6	0,605624531
4	7	0,579037467
4,5	10	0,559166158
5	10	0,552252217
5,5	10	0,561130402
6	2	0,561182097
6,5	2	0,533922654
7	2	0,507771325
7,5	2	0,48372289
8	2	0,462298942
8,5	2	0,443631001
9	2	0,427597757
9,5	2	0,413945767
10	2	0,402373716

Tabla 8: Valores de los parámetros para el caso base.

En la Figura 4 se representa el coste óptimo frente al intervalo de mantenimientos programados,  $T$ :

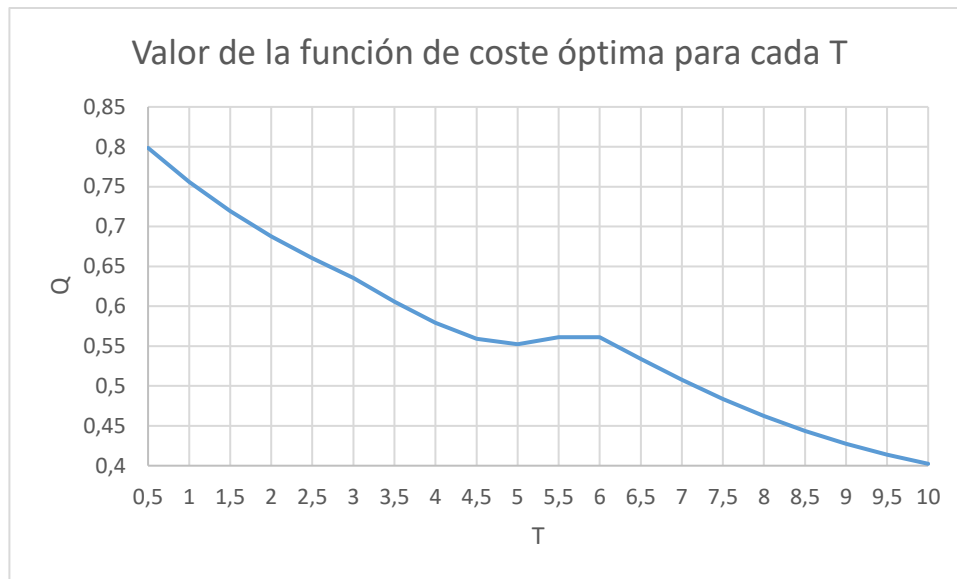


Fig. 4: Representación gráfica del valor de la función de coste  $Q$  para cada  $T$  en el caso base.

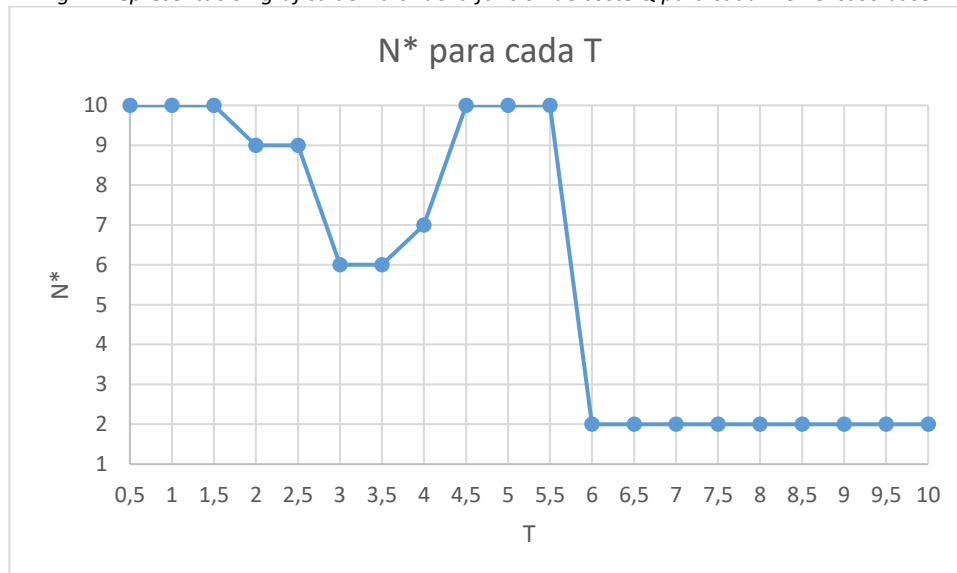


Fig. 5: Representación gráfica del número  $N^*$  óptimo para cada  $T$  en el caso base.

De manera general se observan estas dos tendencias en el caso base:

1. En la Figura 5, se observa una brusca disminución en el valor de  $N^*$  a partir de  $T = 6$ . Esto es debido a que el valor esperado del momento de aparición de las oportunidades es  $\frac{1}{\alpha} = 3,33$ . Por tanto, las oportunidades solo comienzan a aparecer de forma apreciable a partir del punto  $T = 6$ . Con valores de  $T$  inferiores es más probable el reemplazamiento programado que en oportunidad. Como aquel ocurre en intervalos cortos se puede alargar el uso previo del sistema optando por  $N^*$  grandes, a costa del valor de coste del sistema esperado. Después, con valores de  $T$  más elevados, las oportunidades comienzan a aparecer y se prefiere optar por  $N^*$  pequeños que permitan optar a la oportunidad lo antes posible, reduciendo el coste del mantenimiento.
2. En la Tabla 8 y Figura 4 se observa un decrecimiento constante en el valor de la función de coste óptima conforme  $T$  aumenta. El valor de tasa de aparición de oportunidades,  $\alpha$ , conjugado con periodos temporales cada vez más amplios, favorece su aparición y abarata el coste del sistema. Al aumentar  $T$ , se hace más probable que el reemplazamiento ocurra en oportunidad en lugar de en instante programado lo cual, en el caso base, supone una reducción del 50% del coste

## 5. CASOS DE ESTUDIO

En este apartado de la memoria se plantearán una serie de casos de estudio y se discutirán los resultados obtenidos. Los casos se llevarán a cabo modificando uno de los parámetros del sistema, manteniendo el resto constantes, para evaluar cómo afecta su modificación a los valores de la función de coste obtenidos. En los casos de estudio realizaremos variaciones sobre los siguientes parámetros:

1. El valor de la tasa de incidencia de las oportunidades,  $\alpha$ .
2. La razón del coste de reemplazamiento en un momento planificado de mantenimiento y coste de reemplazamiento en oportunidad,  $\frac{c_r}{c_m}$ .
3. El coeficiente que acompañará a la función de coste de las reparaciones,  $c$ :

$$c(x, j) = c \cdot \frac{x}{j}$$

En cada caso de estudio, una vez fijados los valores de los parámetros anteriormente descritos, se buscará el valor de  $N$  óptimo para cada valor propuesto de  $T$ . Es decir, conocido el periodo de los mantenimientos programados, obtendremos el número de estos que hay que hacer, de modo que la sustitución del sistema por uno nuevo se realiza en el momento adecuado desde un punto de vista económico. Los valores propuestos de  $T$  serán  $\{0,5, 1, \dots, 13\}$  y se evaluarán de 0,5 en 0,5. El valor óptimo respecto a la función de coste de  $N$  para cada valor de  $T$  se evaluará de 0 a 10 de 1 en 1. Los valores del caso base a partir de los cuales partirán los casos de estudio están especificados en la Tabla 7.

Cada caso de estudio estará fijado en torno a la modificación de los parámetros de estudio presentes en la tabla anterior. Para cada caso de estudio se escogerá uno de los 3 parámetros ( $c_r$  y  $c_m$  se evaluarán en conjunto, realizando modificaciones de  $c_m$  respecto a  $c_r$ ) y se realizarán 4 modificaciones de su valor, manteniendo el valor del resto de parámetros como en los del caso base. Los casos se definen de la siguiente manera:

Caso de estudio	Parámetro modificado	Valores tomados del parámetro
1	$\alpha$	0,5, 0,4, 0,2, y 0,1
2	$c_r$ frente a $c_m$	$c_m$ es un del valor de $c_r$
3	$c$	

Tabla 9: Descripción de los casos de estudio.

De esta manera, obtendremos para cada caso de estudio 4 tablas análogas a las obtenidas en el apartado anterior, con el valor de la función de coste para cada valor de  $T$  y  $N$ . Recordamos que computamos  $T$  de 0,5 a 10 de 0,5 en 0,5 y  $N$  de 1 a 10 de 1 en 1. Por tanto, para cada modificación del valor en cada caso de estudio contaremos con una tabla de 200 elementos. Una vez hecho esto, mostraremos el valor óptimo de la función de coste para cada valor de  $T$  y el número de periodos  $N^*$  en el que se encuentra ese óptimo. Por ejemplo:

		N				
		1	7	8	9	10
T	0,5	1,24666294	0,80994598	0,80443718	0,80085885	0,79858385

Fig. 6: Ejemplo de optimización.

Para  $T = 0,5$ ,  $N^*$  es 10 y  $Q$  es 0,79858385.

### 5.1: CASO 1, MODIFICACIÓN DEL PARÁMETRO $\alpha$

Mostramos los resultados para cada modificación del parámetro llevada a cabo. Los subíndices representan respectivamente, 1 resultados para  $\alpha = 0,1$ , 2 resultados para  $\alpha = 0,2$ , 3 resultados para  $\alpha = 0,4$  y 4 resultados para  $\alpha = 0,5$ :

T	N <sub>1</sub> *	Q <sub>1</sub>	N <sub>2</sub> *	Q <sub>2</sub>	N <sub>3</sub> *	Q <sub>3</sub>	N <sub>4</sub> *	Q <sub>4</sub>
0,5	10	0,8091017	10	0,80375713	10	0,79357583	10	0,78872726
1	10	0,77294408	10	0,7640537	10	0,74789589	10	0,74055666
1,5	10	0,74047172	10	0,72938128	10	0,71014707	9	0,70173666
2	10	0,71107875	9	0,69858289	9	0,67782034	8	0,66912349
2,5	10	0,68413792	9	0,6713684	8	0,65098562	8	0,64284949
3	7	0,66098948	6	0,64694734	6	0,62589355	6	0,6180937
3,5	6	0,62965457	6	0,6161533	6	0,59745537	6	0,59114842
4	7	0,59930969	7	0,58751836	8	0,57305773	8	0,56888806
4,5	10	0,57432049	10	0,56498845	10	0,55584957	10	0,55428268
5	10	0,56068862	10	0,55476562	10	0,55192963	10	0,55294224
5,5	10	0,56406345	10	0,5612124	10	0,5625721	10	0,56474599
6	10	0,57710024	2	0,5676575	2	0,55795133	2	0,5569602
6,5	2	0,54780605	2	0,53837684	2	0,53286706	2	0,5340435
7	2	0,51721597	2	0,50980508	2	0,50924742	2	0,51287902
7,5	1	0,48767257	2	0,48301332	2	0,48798852	2	0,4942495
8	1	0,46029637	2	0,45861816	2	0,46950337	2	0,47845425
8,5	1	0,4359337	2	0,43683982	2	0,45382714	3	0,46499643
9	1	0,41426737	2	0,41763052	2	0,44076179	3	0,45287304
9,5	2	0,39447004	2	0,40079451	2	0,42999622	3	0,44312326
10	2	0,37670092	2	0,38607445	3	0,42110602	3	0,43539313

Tabla 10: Resultados para el caso 1.

De manera gráfica:

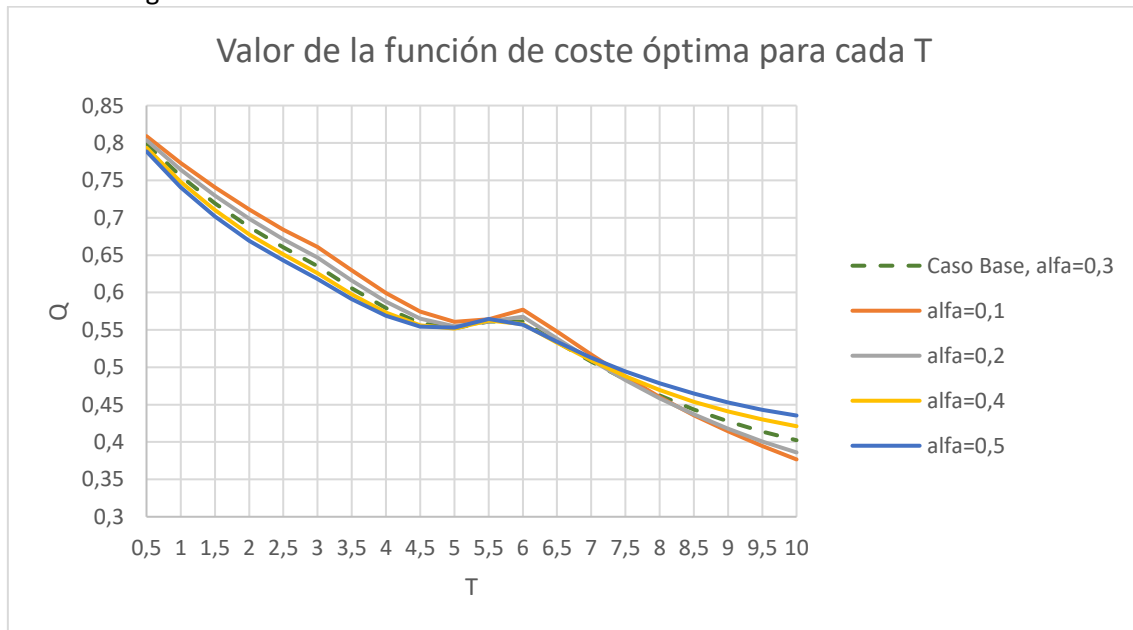


Fig. 7: Representación gráfica del valor de la función de coste  $Q$  para cada  $T$  en el caso 1.

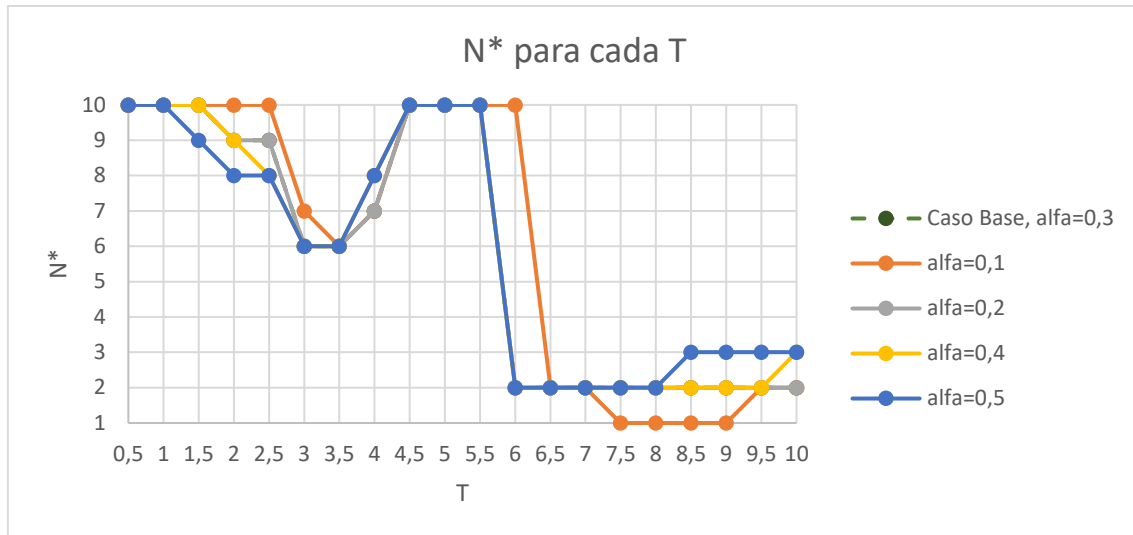


Fig. 8: Representación gráfica del número  $N$  óptimo para cada  $T$  en el caso 1.

Analizando los resultados se observa que los dos efectos mencionados anteriormente persisten independientemente de la elección del valor de  $\alpha$ :

1. En la Figura 8, un corte claro en el valor del  $N^*$  a partir de cierto valor de  $T$
2. En la Figura 7 se advierte una disminución constante del valor de  $Q$  a través de  $T$

Además, se observan otros dos efectos asociados a la modificación del parámetro  $\alpha$ :

1. La Figura 8 muestra que el valor  $T$  a partir del cual se produce la brusca disminución en el valor de  $N^*$  aumenta cuando  $\alpha$  disminuye. Esto es debido a que se precisa un intervalo mayor para garantizar que el reemplazamiento ocurrirá en oportunidad y un valor menor de la tasa de incidencia de oportunidades  $\alpha$  provoca que estas aparezcan más tarde. Como las oportunidades aparecen más tarde, se prioriza mantener  $N^*$  altos hasta valores de  $T$  superiores a los existentes en casos con  $\alpha$  mayores.
2. En la Figura 7, se advierte que el valor de la función de coste óptima,  $Q$ , decrece conforme  $\alpha$  aumenta cuando los valores de  $T$  son inferiores a 6. El significado es claro, cuanto más alta sea la tasa de incidencia de oportunidades, éstas aparecerán antes y con más frecuencia. Como estas oportunidades conllevan costes de reemplazamiento,  $c_m$ , un 50% menores que los localizados en momentos planificados de mantenimiento, se produce un abaratamiento general del sistema tan grande que compensa el recorte en vida útil del mismo.

El comportamiento descrito en los puntos anteriores es el esperado en el sistema. Sin embargo, a partir de  $T = 6$  aproximadamente, las tendencias se invierten, los valores de  $Q$  más altos corresponden a los  $\alpha$  menores y los valores de  $N^*$  más altos a los  $\alpha$  mayores. Esto, que resulta claramente contraintuitivo es la consecuencia de las restricciones consideradas en la programación para obtener tiempos de computación razonables y su explicación es:

*Para  $T$  altas, entre la aparición de la oportunidad y la ocurrencia del  $N$  fallo hay una posibilidad muy alta de que se den los  $K_{max} = 5$  fallos. Una vez se han dado estos  $N + K_{max}$  fallos, el programa de MatLab es incapaz de simular más fallos. A partir de este punto, por tanto, es como si se asumiera que el sistema no va a fallar más. Entonces, ¿Por qué se vuelve  $Q$  menor para  $\alpha$  menores, contradiciendo la tendencia anterior? Sencillamente porque una vez dados los  $K_{max}$  fallos tras el fallo  $N$ , los costes del sistema se bloquean. Estos costes se mantienen constantes. Este aumento del ciclo de vida es más favorable para  $\alpha$  menores ya que la oportunidad aparecerá después, alargando la vida del sistema. Este error del sistema debido a valores bajos de  $K_{max}$  no se observa en el estudio de convergencia porque es un efecto oculto, que solo se descubre tras modificar  $\alpha$ . Aun así, decidimos mantener  $K_{max}$  en 5 porque aumentos ulteriores de este número producen incrementos de los costes computacionales inasumibles.*

## 5.2: CASO 2, MODIFICACIÓN DEL PARÁMETRO $c_m$ RESPECTO A $c_r$

En la Tabla 12 se muestran los resultados para cada modificación del parámetro llevada a cabo. El valor del parámetro  $c_r$  se mantiene en 3. Los subíndices representan respectivamente, 1 resultado para  $c_m = 0,9$ , un 30% de  $c_r$ , 2 resultados para  $c_m = 1,2$ , un 40% de  $c_r$ , 3 resultados para  $c_m = 1,8$ , un 60% de  $c_r$  y 4 resultados para  $c_m = 2,1$ , un 70% de  $c_r$ :

T	$N_1^*$	$Q_1$	$N_2^*$	$Q_2$	$N_3^*$	$Q_3$	$N_4^*$	$Q_4$
0,5	10	0,79152062	10	0,79505223	10	0,80211547	10	0,80564708
1	10	0,74271656	10	0,74921662	10	0,76221675	10	0,76871681
1,5	9	0,70117133	10	0,71028399	10	0,72832773	10	0,7373496
2	8	0,66439546	9	0,67609673	9	0,69898324	10	0,71037216
2,5	7	0,63329649	8	0,64692335	9	0,67373027	10	0,68691412
3	6	0,60255524	6	0,61897186	6	0,65180511	7	0,66768566
3,5	6	0,56875523	6	0,58718988	6	0,62405918	7	0,64194101
4	7	0,53976602	7	0,55940174	8	0,59830954	8	0,61752929
4,5	9	0,51886052	10	0,53905411	10	0,57927821	10	0,59939026
5	10	0,51107108	10	0,53166165	10	0,57284278	10	0,59343335
5,5	10	0,52117896	10	0,54115468	10	0,58110612	10	0,60108184
6	1	0,49625792	2	0,53014959	3	0,59178594	10	0,61393787
6,5	1	0,4630702	2	0,50130033	2	0,56654498	3	0,59773164
7	1	0,43374056	2	0,47362393	2	0,54191872	2	0,57606612
7,5	1	0,40824009	2	0,44817311	2	0,51927267	2	0,55482245
8	1	0,38633412	2	0,42549982	2	0,49909806	2	0,53589718
8,5	1	0,36766839	2	0,40574326	2	0,48151875	3	0,51853313
9	2	0,3499523	2	0,38877503	2	0,46642049	3	0,50331735
9,5	2	0,33470807	2	0,37432692	2	0,45356461	3	0,49025377
10	2	0,32178635	2	0,36208004	2	0,4426674	3	0,47913635

Tabla 11: Resultados para el caso 2.

En las Figuras 9 y 10 se muestran, respectivamente,  $Q$  óptimo y  $N^*$  para cada valor de  $T$ :

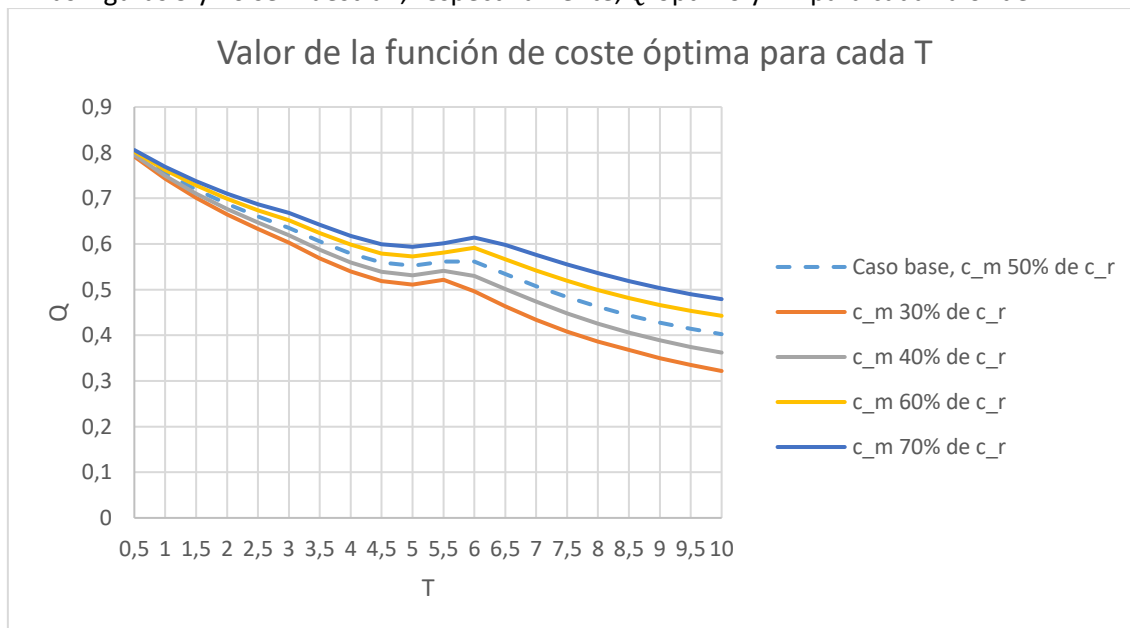


Fig. 9: Representación gráfica del valor de la función de coste  $Q$  para cada  $T$  en el caso 2.



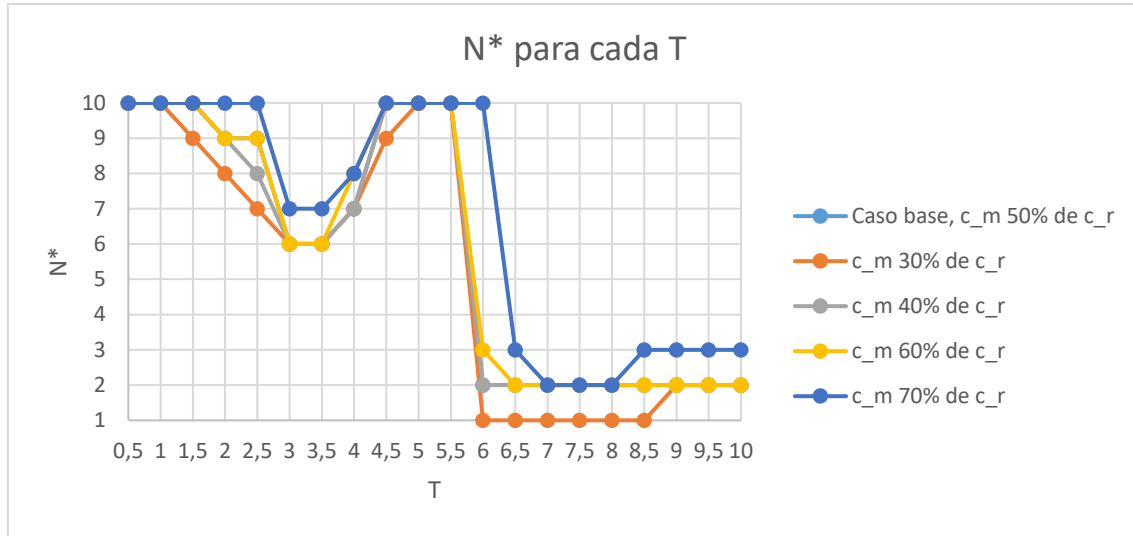


Fig. 10: Representación gráfica del número  $N$  óptimo para cada  $T$  en el caso 2.

Se siguen observando los 2 efectos globales, como en el caso base y por razones análogas a las explicadas en el apartado anterior, independientes de la elección del valor de  $c_m$ .

Respecto a los efectos provocados exclusivamente por la modificación del parámetro  $c_m$  respecto a  $c_r$  se observa que:

1. Excepto para un  $c_m$  con valor del 70% de  $c_r$ , la disminución relativa de  $c_m$  respecto a  $c_r$  mantiene el punto en el cual se da el corte en  $N^*$ . El efecto visible es que el coste progresivamente inferior del reemplazamiento en oportunidad fomenta que se opte por disparar el mantenimiento con  $N^*$  menores a lo largo de todo el dominio de  $T$ , ya que el mantenimiento en oportunidad resulta tanto más provechoso, compensando la reducción del tiempo de uso del sistema. En el caso  $\frac{c_m}{c_r} = 0,7$ , cuando el mantenimiento por oportunidad es menos beneficioso, se precisa un valor de  $T$  más elevado para disminuir  $N^*$ , es decir, hay que “aprovechar más” el sistema antes de sustituirlo por otro nuevo.
2. La reducción progresiva del valor de  $c_m$  disminuye también el valor de  $Q$  debido a que, con una tasa de incidencia de oportunidades,  $\alpha$ , constante, el valor de esas oportunidades cada vez es menor, reduciendo los costes del sistema.
3. En la Figura 10 se advierte un cambio en el patrón de  $N^*$  que vuelve a crecer para valores de  $T$  muy grandes. Nuestra conjetura es que este es un efecto falso, provocado por la restricción  $K_{max} = 5$ , que resulta menos adecuada cuando el intervalo para el mantenimiento programado aumenta. Para estos casos sería conveniente considerar valores de  $K_{max}$  más grandes.

### 5.3: CASO 3, MODIFICACIÓN DEL PARÁMETRO $c$

Mostramos los resultados para cada modificación del parámetro llevada a cabo. Los subíndices representan respectivamente, 1 resultados para  $c = 0,125$ , 2 resultados para  $c = 0,15$ , 3 resultados para  $c = 0,2$  y 4 resultados para  $c = 0,225$ :

T	$N_1^*$	$Q_1$	$N_2^*$	$Q_2$	$N_3^*$	$Q_3$	$N_4^*$	$Q_4$
0,5	10	0,70671984	10	0,75265184	10	0,84451586	9	0,89004484
1	10	0,66700687	10	0,71136178	9	0,7999282	8	0,84227205
1,5	10	0,63327469	10	0,67629028	8	0,76105481	7	0,80056221
2	10	0,60426467	10	0,64612817	7	0,72688621	6	0,76408319
2,5	10	0,57903889	10	0,61990064	7	0,6979022	5	0,73259012
3	10	0,56202326	7	0,60047558	5	0,66904268	5	0,70087242
3,5	8	0,5366199	7	0,57163397	6	0,63860935	5	0,67080213
4	9	0,50768265	8	0,54371665	7	0,61291548	6	0,64642809
4,5	10	0,48491719	10	0,52204167	9	0,5954266	8	0,63090743
5	10	0,47851227	10	0,51538224	10	0,58912219	10	0,62599216
5,5	10	0,48673725	10	0,52393383	10	0,59832698	2	0,63177768
6	10	0,50056227	10	0,53830782	2	0,58241498	2	0,60364786
6,5	2	0,49260097	2	0,51326181	2	0,55458349	2	0,57524433
7	2	0,46754775	2	0,48765954	2	0,52788311	2	0,54799489
7,5	2	0,44450926	2	0,46411607	2	0,5033297	2	0,52293652
8	2	0,42398505	2	0,443142	2	0,48145588	2	0,50061283
8,5	2	0,40610109	2	0,42486606	2	0,46239595	2	0,48116089
9	2	0,3907412	2	0,40916948	2	0,44602603	2	0,46445431
9,5	2	0,37766255	2	0,39580416	2	0,43208736	2	0,45022897
10	3	0,36599336	2	0,38447509	2	0,42027234	2	0,43817095

Tabla 12: Resultados para el caso 3.

De manera gráfica:

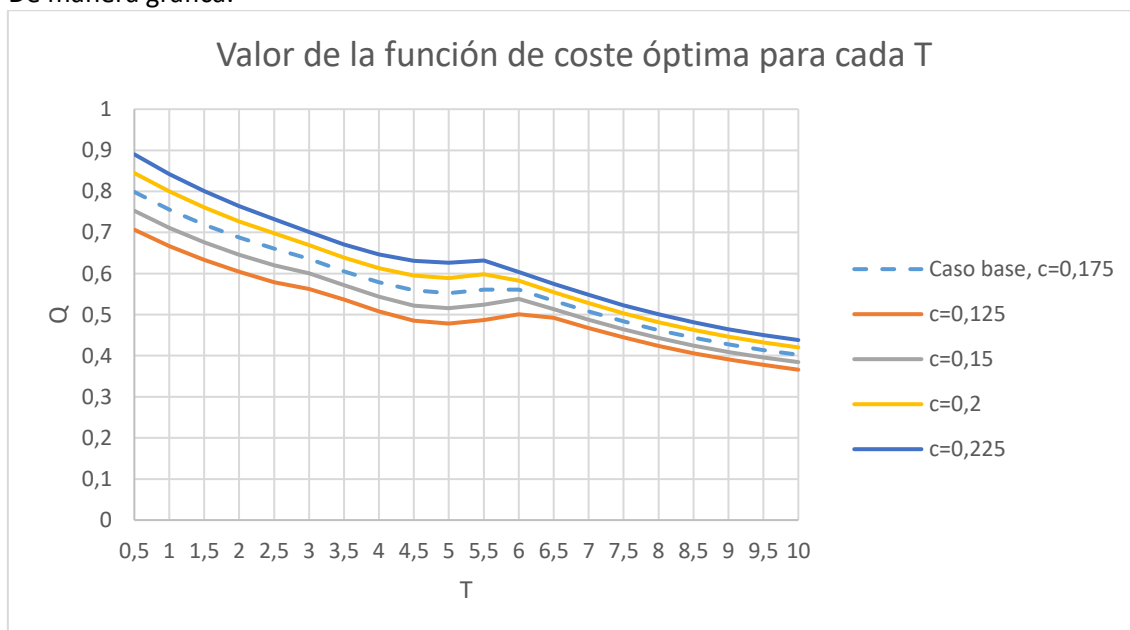


Fig. 11: Representación gráfica del valor de la función de coste  $Q$  para cada  $T$  en el caso 3.

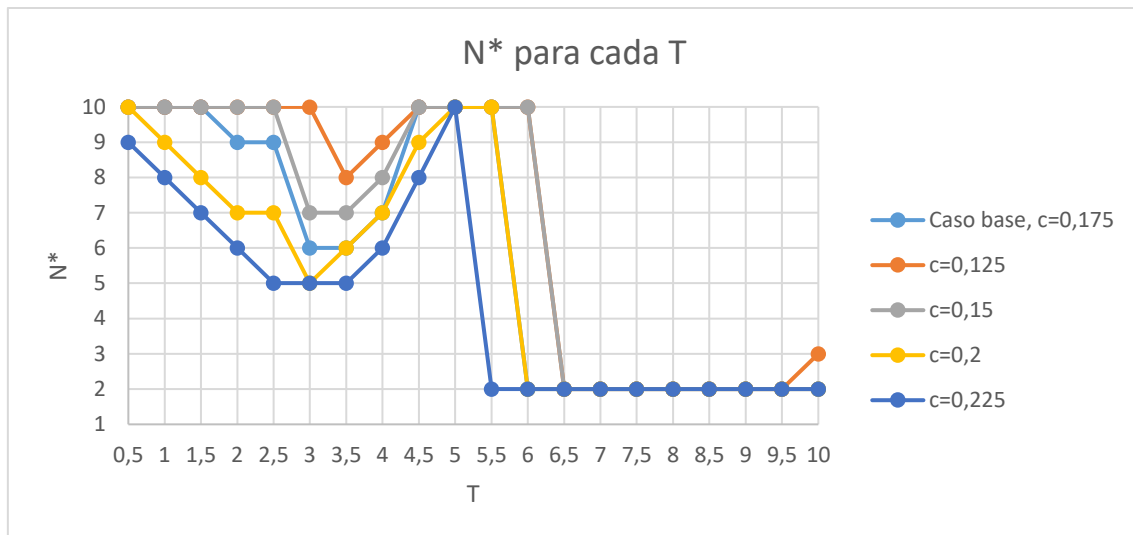


Fig. 12: Representación gráfica del número  $N$  óptimo para cada  $T$  en el caso 3.

Se siguen observando los 2 efectos globales, como en el caso base y por razones análogas a las explicadas en el apartado anterior, independientes de la elección del valor de  $c$ .

Respecto a los efectos provocados exclusivamente por la modificación del parámetro  $c$  se observa que:

1. El corte observado en el  $N^*$  se observa en  $T$  mayores conforme  $c$  disminuye. Esto es debido a que la reducción progresiva de la reparación de fallos durante el ciclo disminuye el interés por el reemplazamiento. Esto permite elegir  $N$  mayores incluso en  $T$  altos y alargar el ciclo de vida del sistema. Esta reducción de los costes de los fallos compensa incluso el abaratamiento producido por la cada vez más probable aparición de oportunidades, hasta que esta aparición es tan probable que resulta más rentable esperar a la misma (y reducir el coste de la red) que alargar el ciclo de vida del producto eligiendo  $N$  mayores.
2. Cuando  $c$  aumenta  $N^*$  disminuye y por tanto el tiempo que transcurre hasta la renovación del sistema.
3. Se advierte que al aumentar el coste unitario de las reparaciones estas resultan menos ventajosas frente al reemplazamiento del sistema. Así  $N^*$  decrece con  $c$ , impulsando una sustitución más temprana del sistema. Al acortarse la vida útil de éste, el coste óptimo aumenta.

## 6. CONCLUSIONES

A modo de conclusión, listaremos una serie de aspectos:

1. El trabajo presenta una política de mantenimiento preventiva para un sistema cuyos fallos se comportan de acuerdo a un proceso de Poisson no homogéneo mezclado. El objetivo es definir la política óptima desde el punto de vista del coste para valores dados de ciertos parámetros. Estos parámetros definen, de una parte, la fiabilidad del sistema, describiendo los fallos y su estado tras la reparación. De otra, cuantifican los costes unitarios de los mantenimientos correctivos y preventivo.
2. El hecho de ampliar el proceso de Poisson homogéneo a uno no homogéneo mezclado permite modelar el envejecimiento de un sistema por efecto del uso y el paso del tiempo, así como la mala calidad de las reparaciones que se realizan.
3. Otra novedad del modelo propuesto en este trabajo es la aparición de oportunidades, en las cuales se reemplaza el sistema de manera más barata antes de los momentos planificados de mantenimiento. La aparición de estas oportunidades está gobernada por su tasa de incidencia,  $\alpha$ , y le otorga al mantenimiento una mayor flexibilidad. Con ellas se describe la posibilidad de reemplazamientos cuando ocurre una oferta o ante la llegada de nueva competencia al mercado de los servicios de mantenimiento.
4. Las ecuaciones son muy sensibles a los límites de integración, y la existencia de sumatorios con infinitos términos hace necesario realizar estudios de convergencia sobre el valor máximo de periodos anteriores al mantenimiento programado, así como de fallos después del que dispara la puesta en marcha de este último para truncar los límites de los sumatorios con errores suficientemente bajos.
5. En general, se observa unas reducciones constantes de  $Q$  y de  $N^*$  a lo largo del dominio de  $T$ , debidas las dos a una cada vez mayor aparición de oportunidades conforme  $T$  aumenta.
6. Los casos de estudio muestran que el sistema es particularmente sensible a las modificaciones sobre la tasa de incidencia de oportunidades,  $\alpha$ . Esto es debido a que esta modificación provoca un cambio tanto en el numerador (coste del sistema) como en el denominador (duración del ciclo de vida del sistema) de la función de coste,  $Q$ . El incremento de  $\alpha$  provoca un aumento de la probabilidad de renovación en oportunidad. Así, cuando ésta es considerablemente más económica que la programada, la política óptima tiende a sacar provecho de las oportunidades, disparando antes el mantenimiento, reduciendo  $N^*$ .

El estudio de los 3 casos planteados permite proporcionar una guía para quienes realizan el mantenimiento en la práctica con el objetivo de minimizar costes:

1. Para el caso donde la distancia temporal entre momentos planificados de mantenimiento,  $T$ , es pequeño ( $T < 6$ , aprox), la elección óptima consiste en reparar más fallos ( $N^*$  elevado) para que se alargue el uso del sistema antes de iniciar su sustitución. Esto ocurre porque, aunque la tasa de oportunidades es baja, la frecuencia del mantenimiento programado impedirá un alargamiento excesivo de uso.
2. Para los casos donde  $T$  es alto,  $T > 6$  aproximadamente, sugerimos seleccionar un número de fallos  $N$  pequeño, que permita optar inmediatamente a la oportunidad. Esto se hace en contra de la duración del ciclo de vida del sistema, pero permite aprovecharse de la reducción del coste total del sistema debido a la aparición de oportunidades.
3. Una mayor tasa de oportunidades reduce los costes del mantenimiento. Además cuanto más económico resulte el reemplazamiento por oportunidad frente al programado, es conveniente reducir el número  $N^*$  de reparaciones que se hacen del sistema antes de sustituirlo por otro nuevo.

Por último, a lo largo de la realización de este trabajo se han evidenciado varias líneas de trabajo futuras en relación con este modelo. En general, estas serían:

1. Mejorar la robustez de las ecuaciones del modelo, de manera que estas no fueran tan sensibles a los límites de integración del sistema.
2. Analizar otros métodos de integración numérica que permitieran reducir el tiempo de ejecución del sistema. Mediante este ahorro de costes computacionales se podría mejorar la precisión del sistema, por ejemplo aumentando el valor máximo de los fallos tenidos en cuenta después de  $N, K_{max}$ .

## 7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] T. Nakagawa, “Modified Discrete Preventive Maintenance Policies”, *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 33, pp. 703-715, 1986.
- [2] T. Nakagawa, *Maintenance Theory of Reliability*, Ed. 1, Springer-Verlag London, 2005.
- [3] J. Cha, M. Finkelstein, “Point Processes for Reliability Analysis”, Ed. 1, Springer-Verlag London, 2018.
- [4] H. M. Hashemian, “State-of-the-Art Predictive Maintenance Techniques”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 60, no. 1, January 2011.
- [5] B. de Jonge and P.A. Scarf, “A review on maintenance optimization”, *European Journal of Operational Research*.